

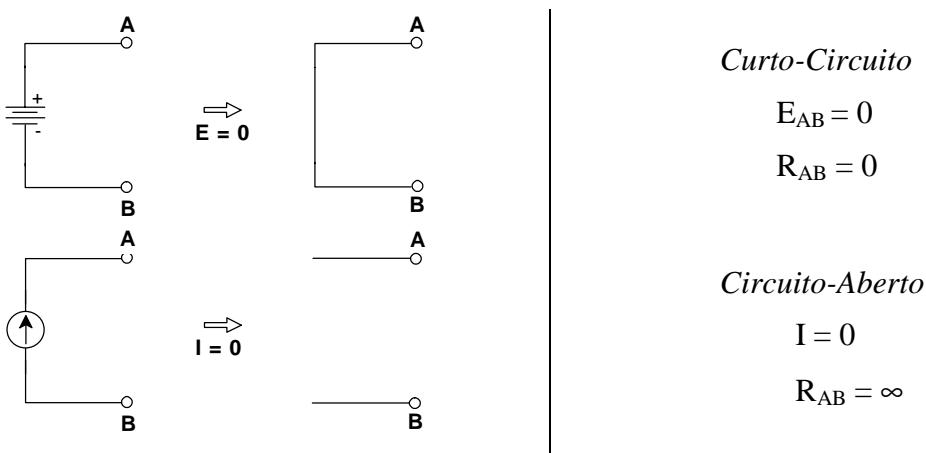
### III TEOREMAS DE CIRCUITOS

#### III.1 Teorema da Superposição

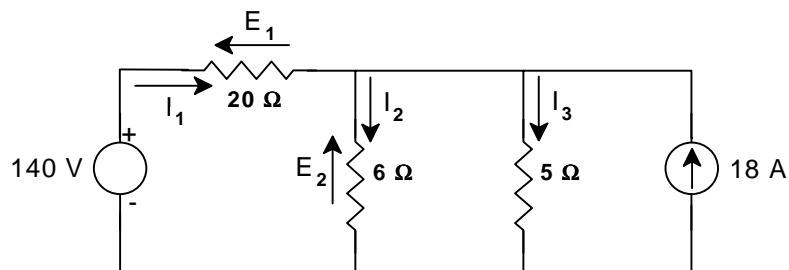
*Em um circuito linear contendo várias fontes independentes, a corrente ou tensão de um elemento do circuito é igual a soma algébrica das correntes ou tensões dos componentes produzidas por cada fonte independente operando isoladamente.*

Este teorema só se aplica no cálculo de correntes ou tensões e não pode ser utilizado no cálculo da potência.

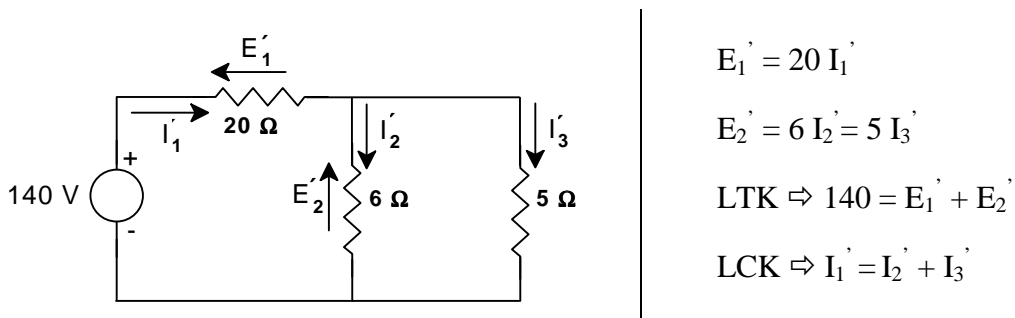
Para que se possa operar cada fonte isoladamente, as outras devem ser eliminadas. O procedimento que deve ser adotado nesta eliminação, das fontes de tensão e fontes de corrente, é apresentado seguir.



**Exemplo 1:** Determinar para o circuito abaixo os valores  $E_1$ ,  $I_1$ ,  $P_2$ ,  $E_2$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .



**Passo 1:** Devido à fonte de 140V, abrindo a fonte de corrente tem-se:



Fazendo as substituições tem-se:  $\frac{E'_1}{20} = \frac{E'_2}{6} + \frac{E'_2}{5}$

$$3E_1' = 10E_2' + 12E_2'$$

$$3E_1' = 22E_2' \Rightarrow E_1' = \frac{22}{3} \cdot E_2'$$

Tem-se então:

$$E_2' = 16,8V$$

$$E_1' = 123,2V$$

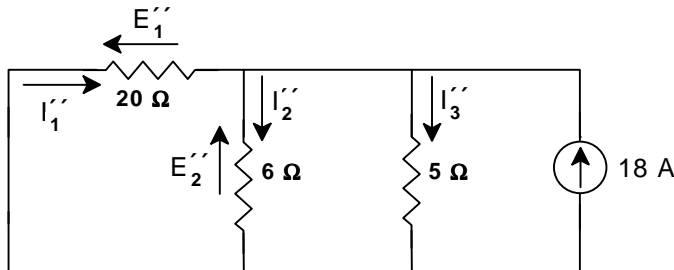
$$I_1' = 6,16A$$

$$\text{LKT} \Rightarrow 140 = \left( \frac{22}{3} + 1 \right) E_2'$$

$$I_2' = 2,8A$$

$$I_3' = 3,36A$$

**Passo 2:** Devido à fonte de 18A, curto-circuitando a fonte de tensão tem-se:



$$E_1'' = 20 I_1''$$

$$E_2'' = 6 I_2'' = 5 I_3''$$

$$\text{LTK} \Rightarrow -E_1'' - E_2'' = 0$$

$$\text{LCK} \Rightarrow I_1'' + 18 = I_2'' + I_3''$$

Fazendo as substituições tem-se:  $\frac{E_1''}{20} + 18 = \frac{E_2''}{6} + \frac{E_2''}{5}$

$$3E_1'' + 1080 = -10E_1'' - 12E_1''$$

$$E_1'' = -43,2V$$

$$E_2'' = 43,2V$$

$$I_1'' = -\frac{43,2}{20} = -2,16A$$

$$I_2'' = \frac{43,2}{6} = 7,20A$$

$$I_3'' = \frac{43,2}{5} = 8,64A$$

**Passo 3:** Devido à superposição tem-se:

$$E_1 = E_1' + E_1'' = 112,2 - 43,2 = 80V$$

$$E_2 = E_2' + E_2'' = 60V$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' = 4,0A$$

$$I_2 = 10A$$

$$I_3 = 12A$$

$$P_2 = 6 (2,8)^2 + 6 (7,2)^2 = 358W$$

Levando em consideração este valor de  $P_2$ , pode-se observar que o Teorema da Superposição não é válido em relação a potência. Para tanto se deve calcular a potência dissipada utilizando as fórmulas usuais. Tem-se então:

$$P_2 = R_2 \cdot I_2^2 \quad \text{ou} \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R_2}$$

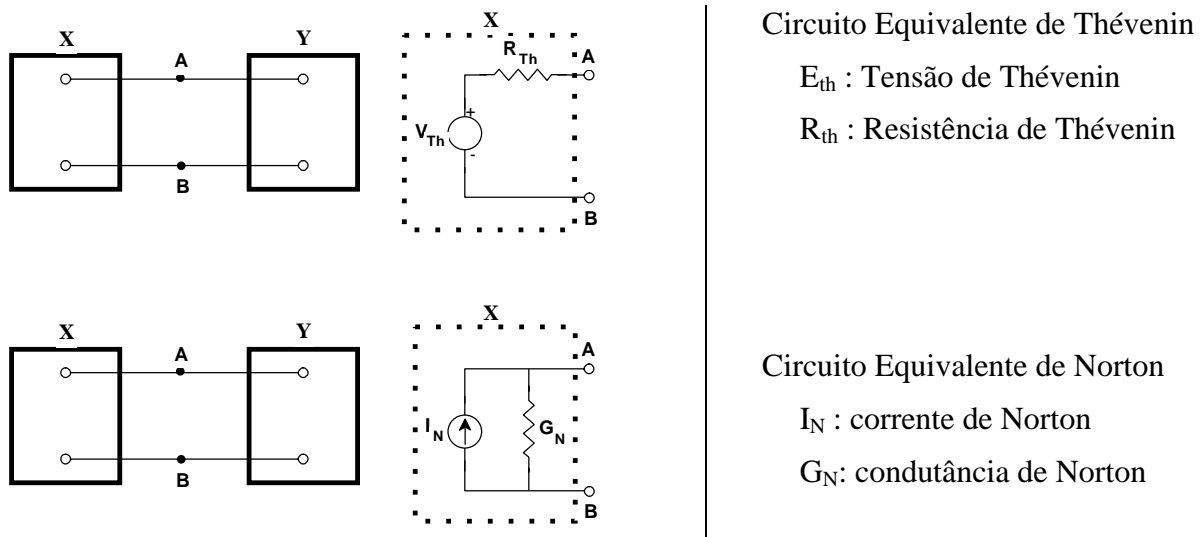
$$P_2 = 6 \cdot 10^2 = 600W \quad \text{ou} \quad P_2 = \frac{60^2}{6} = 600W$$

Pode-se observar que a potência dissipada calculada pela fórmula usual não é igual ao valor encontrado aplicando-se o teorema da superposição comprovando a afirmação feita anteriormente.

**Exercício:** resolver o exemplo utilizando o teorema da superposição e os conceitos de divisor de tensão e corrente que foram apresentados no capítulo anterior.

### III.2 Teoremas de Thévenin e Norton

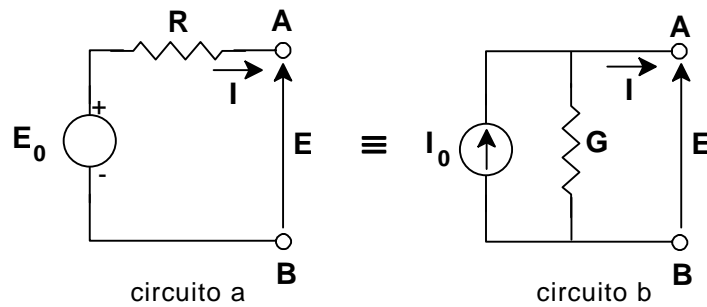
Para que se aplique estes teoremas a uma rede qualquer esta deve ser dividida em duas partes: X e Y. A rede X deve ser linear e bilateral (2 terminais) e a rede Y deve ser composta por uma resistência e/ou uma fonte e/ou qualquer ramo. O teorema especifica que a parte X pode ser substituída por um circuito equivalente de Thévenin ou de Norton. Após o cálculo deste circuito equivalente, a parte Y deve ser novamente agregada a este circuito equivalente para a solução final.



A seguir apresenta-se como calcular os valores dos circuitos equivalentes de Thévenin e Norton.

- $E_{th}$  é a tensão em circuito aberto, medida nos terminais AB. É calculada resolvendo-se o circuito correspondente considerando as fontes ativas e as resistências do circuito em relação a estes terminais;
- $R_{Th}$  é a resistência vista nos terminais AB, quando todas as fontes internas são anuladas (fonte de tensão = curto-circuito e fonte de corrente = circuito-aberto);
- $I_N$  é a corrente através do curto-circuito aplicado aos terminais AB no sentido  $A \Rightarrow B$ ;
- $G_N$  é a condutância vista nos terminais AB, quando todas as fontes internas são anuladas (fonte de tensão = curto-circuito e fonte de corrente = circuito-aberto).

O conceito de **Equivalência de Fontes**, apresentado abaixo pode ser utilizado na resolução de circuitos utilizando-se os teoremas de Thévenin e Norton.



A seguir se apresenta os cálculos que revelam as relações que devem existir para que as fontes acima sejam equivalentes.

**Se  $E_{AB} = 0$  (curto-circuito)**

*Circuito a:*

$$I = \frac{E_0}{R}$$

*Circuito b:*

$$I = I_0 \Rightarrow E_0 = R \cdot I_0$$

**Se  $I = 0$  (circuito aberto)**

*Circuito a:*

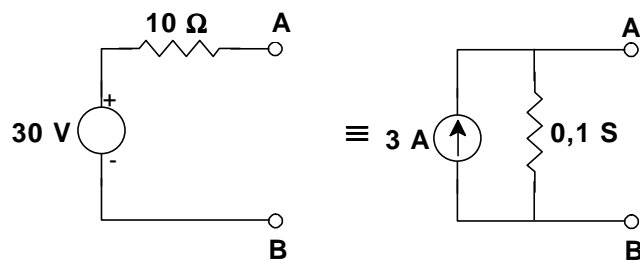
$$E = E_0$$

*Circuito b:*

$$E = \frac{I_0}{G} \Rightarrow E_0 = \frac{I_0}{G}$$

**Então:**  $R = \frac{1}{G}$  e  $I = \frac{E_0}{R}$

**Exemplo 2:** Calcular a fonte equivalente à fonte de tensão apresentada.

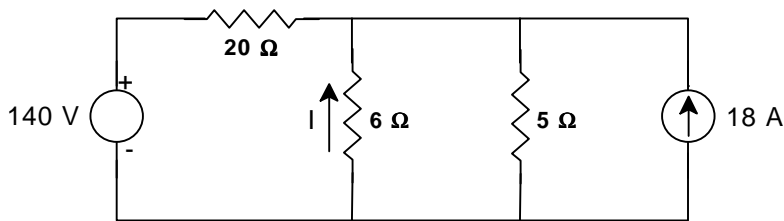


Como o circuito de Norton e o de Thévenin são representações para a mesma fonte física, para que suas características terminais sejam as mesmas, deve-se ter:

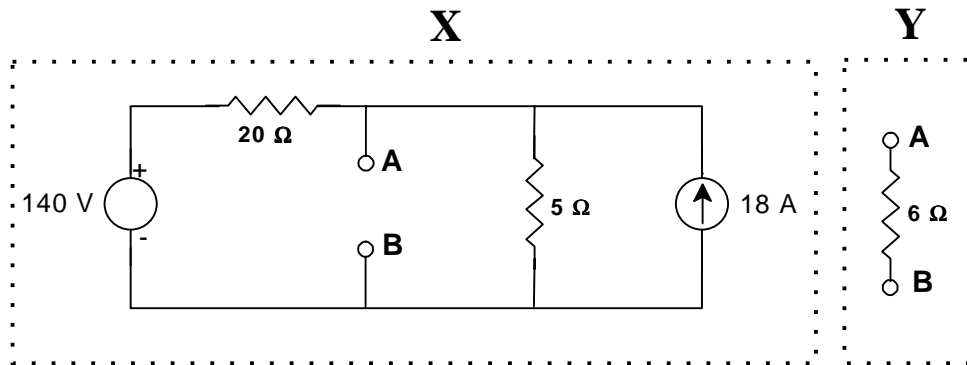
$$E_{Th} = R_{Th} \cdot I_N$$

$$R_{Th} = \frac{1}{G_N}$$

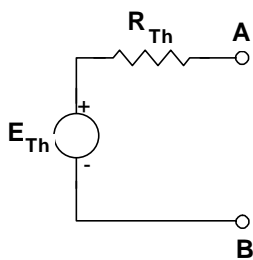
**Exemplo 3:** Determinar a corrente  $I$  no circuito abaixo usando o Teorema de Thévenin.



Para este exemplo considera-se a resistência de 6 Ω como sendo o circuito Y. Para calcular o circuito equivalente de Thévenin segundo a metodologia apresentada deve-se retirar o circuito Y (a resistência de 6Ω).



Cálculo do Equivalente de Thévenin:



Por superposição calcula-se  $E_{Th}$ :

$$E_{Th} = E' + E''$$

$$E' = \frac{5}{25} \cdot 140 = 28V$$

$$I_1'' = \frac{5 \cdot 18}{25} = \frac{18}{5} A$$

$$E'' = \frac{18}{5} \cdot 20 = 72V$$

$$E_{Th} = 100V$$

Solução alternativa por Kirchoff:

$$LTK \Rightarrow 140 - 20I_1 - 5I_2 = 0$$

$$LCK \Rightarrow I_1 - I_2 + 18 = 0$$

$$E_{Th} = 140 - 20I_1$$

$$140 - 20I_1 - 5(I_1 + 18) = 0$$

$$140 - 25I_1 - 90 = 0$$

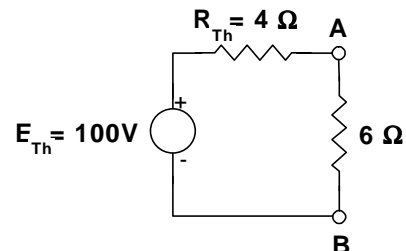
$$I_1 = 2A$$

$$E_{Th} = 140 - 40 = 100V$$

Calculando agora  $R_{Th}$ :

$$R_{Th} = 20 // 5 \Rightarrow \frac{20 \times 5}{25} = 4\Omega$$

Após ter-se calculado  $V_{Th}$  e  $R_{Th}$  pode-se finalmente calcular a corrente no resistor de 6 Ω:

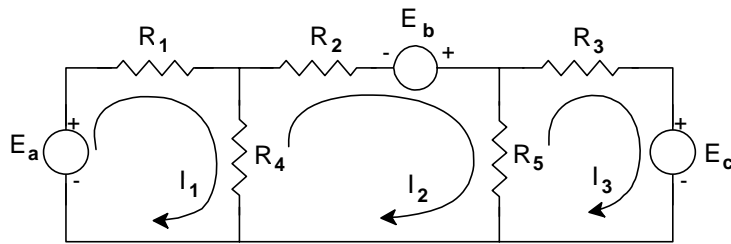


$$I = -\frac{100}{10} \Rightarrow I = -10A$$

### III.3 Análise por Correntes de Malha

Este tipo de análise resulta da aplicação das leis de Kirchoff a circuitos com várias malhas. As leis de Kirchoff são aplicadas às correntes das diversas malhas respeitando sentidos arbitrados (preferencialmente o sentido horário).

Para exemplificar este procedimento será utilizado o circuito apresentado na figura abaixo.



Aplicando-se as leis de Kirchhoff tem-se:

$$\begin{aligned} E_a - R_1 I_1 - R_4 (I_1 - I_2) &= 0 \\ -R_2 I_2 + E_b - R_5 (I_2 - I_3) - R_4 (I_2 - I_1) &= 0 \\ -R_3 I_3 - E_c - R_5 (I_3 - I_2) &= 0 \end{aligned}$$

Reescrevendo a primeira equação tem-se:

$$E_a = (R_1 + R_4) I_1 - R_4 I_2$$

Pode-se observar que  $R_1$  e  $R_4$  são as resistências que pertencem a malha 1 (resistência própria) e que  $-R_4$  (o coeficiente de  $I_2$ ) é o negativo da resistência existente entre a malha 1 e a malha 2 (resistência mútua).

Estendendo o mesmo raciocínio para as outras malhas tem-se:

$$\begin{aligned} E_b &= (R_2 + R_4 + R_5) I_2 - R_4 I_1 - R_5 I_3 \\ -E_c &= (R_3 + R_5) I_3 - R_5 I_2 \end{aligned}$$

Escrevendo os resultados na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ -E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_3 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \text{ ou seja: } \bar{E} = \bar{R} \cdot \bar{I}$$

A seguir apresenta-se como, extrapolando os resultados apresentados acima, e baseando-se na teoria matemática, pode-se montar diretamente as matrizes  $\bar{E}$ ,  $\bar{R}$  e  $\bar{I}$ :

◆ Montagem direta de  $\bar{E}$ :

$E_i$  : é dada pela soma algébrica das fontes de tensão ao se percorrer a malha no sentido arbitrado para a corrente. A tensão será positiva se a corrente sair pelo terminal positivo da fonte.

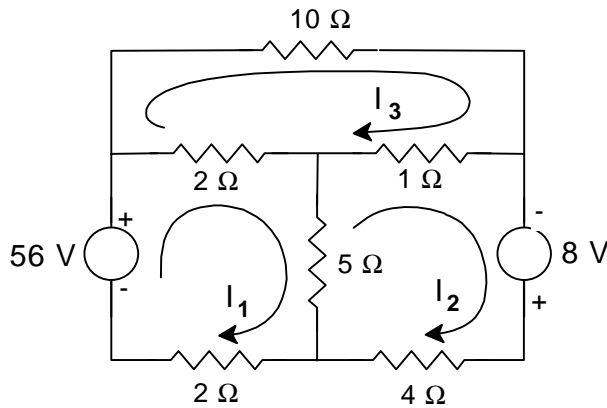
◆ Montagem direta de  $\bar{R}$  :

- Os elementos da diagonal principal –  $R_{ii}$  – são obtidos pela soma das resistências dos ramos da malha  $i$ ;
- Os elementos fora da diagonal principal –  $R_{ij}$  – tem o valor da resistência equivalente do ramo comum à malha  $i$  e  $j$  com sinal (-).

◆ Montagem direta de  $\bar{I}$ :

A matriz  $\bar{I}$  é o Vetor de corrente de malhas a serem determinadas, arbitradas num mesmo sentido.

**Exemplo 4:** Determinar as correntes de malha para o circuito abaixo:



Utilizando-se as regras apresentadas acima, se obtém a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -5 & -2 \\ -5 & 10 & -1 \\ -2 & -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante tem-se:  $\Delta = \det \begin{bmatrix} 9 & -5 & -2 \\ -5 & 10 & -1 \\ -2 & -1 & 13 \end{bmatrix} = 775$

Para o cálculo de  $I_1$ , deve-se substituir a primeira coluna da matriz  $\Delta$  pelo vetor das tensões (analogamente para o cálculo de  $I_2$  e  $I_3$ ). Desta maneira tem-se:

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} 56 & -5 & -2 \\ 8 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 13 \end{bmatrix} = 7760$$

Considerando calculadas  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , pode-se calcular as correntes utilizando a Regra de Cramer:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

$$I_1 = 10A$$

$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

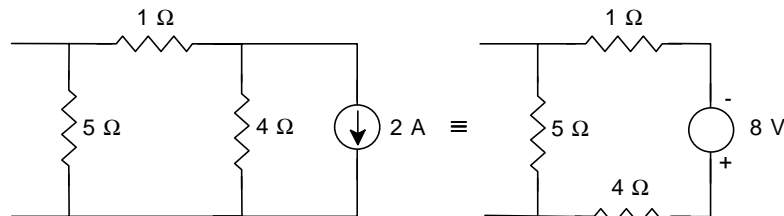
$$I_2 = 6A$$

$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

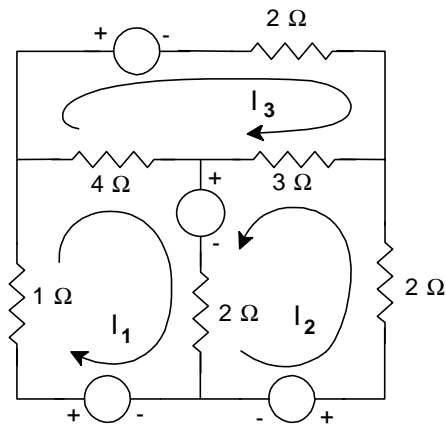
$$I_3 = 2A$$

### Casos Particulares:

- Existência de fontes de corrente em paralelo com uma condutância (resistência)  $\Rightarrow$  efetuar a conversão de fontes

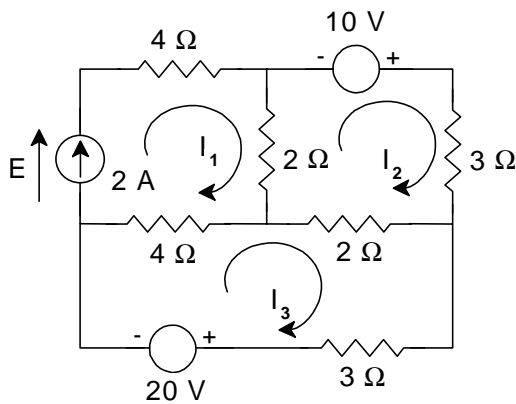


- Corrente arbitrárias em qualquer sentido  $\Rightarrow$  aplica-se as mesmas regras só que na montagem de  $\bar{R}$ , os elementos fora da diagonal principal terão sinais positivos se as correntes nestes elementos estiverem no mesmo sentido.



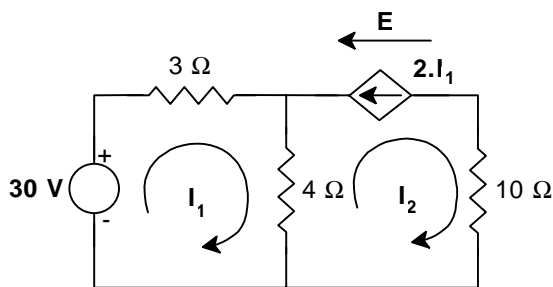
$$\bar{R} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 2 & 7 & 3 \\ -4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

- *Fontes de corrente sem possibilidade de conversão*: considera-se que existe uma tensão a ser determinada nas extremidades das fontes.



$$\begin{bmatrix} E \\ 10 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -4 \\ -2 & 7 & -9 \\ -4 & -9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

- *Fontes controladas*  $\Rightarrow$  monta-se as equações diretamente:



$$\begin{bmatrix} 30 \\ -E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ -2I_1 \end{bmatrix}$$

$$30 = 7I_1 + 8I_1 \Rightarrow I_1 = 2A$$

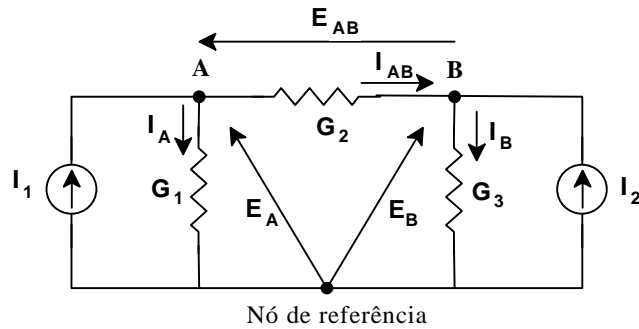
$$\text{logo } \Rightarrow I_2 = -4A$$

$$-E = -4I_1 - 28I_1 \Rightarrow E = 64V$$

### III.4 Análise pelas Tensões nos Nós (Nodal)

Este método permite que se determine a tensão em 2 ou mais nós, em relação a um nó de referência. Para tanto, as equações decorrentes da LCK são escritas implicitamente, de tal modo que somente as equações LTK precisem ser resolvidas.

O circuito da figura abaixo é utilizado para demonstrar a análise de um circuito utilizando-se o método das tensões nos nós.



LTK  $\Rightarrow E_{AB} - E_A + E_B = 0 \Rightarrow E_{AB} = E_A - E_B$

LCK Nós A e B  $\Rightarrow \begin{cases} I_1 - I_A - I_{AB} = 0 \Rightarrow I_1 = I_A + I_{AB} \Rightarrow I_1 = G_1 E_A + G_2 (E_A - E_B) \\ I_2 - I_B + I_{AB} = 0 \Rightarrow I_2 = I_B - I_{AB} \Rightarrow I_2 = G_3 E_B - G_2 (E_A - E_B) \end{cases}$

Reescrevendo convenientemente tem-se:

$$\begin{cases} I_1 = (G_1 + G_2)E_A - G_2 E_B \\ I_2 = -G_2 E_A + (G_2 + G_3)E_B \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial:  $\bar{I} = \bar{G} \cdot \bar{E} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix}$

A seguir apresenta-se como, extrapolando os resultados apresentados acima, e baseando-se na teoria matemática, pode-se montar diretamente as matrizes  $\bar{I}$ ,  $\bar{E}$  e  $\bar{G}$ :

◆ Montagem direta de  $\bar{I}$ :

$I_i$ : soma algébrica das fontes de corrente ligadas ao nó  $i$ , sendo positivas as que entram no nó em questão.

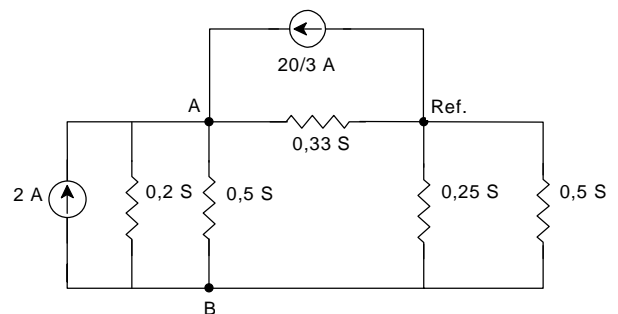
◆ Montagem direta de  $\bar{G}$ :

- Elementos da diagonal principal –  $G_{ii}$  – soma de todas as condutâncias ligadas ao nó  $i$ ;
- Elementos fora da diagonal principal –  $G_{ij}$  – condutância equivalente conectada entre os nós  $i$  e  $j$ , com sinal negativo.

◆ Montagem direta de  $\bar{E}$ :

$E_i$ : faz referência a tensão do nó  $i$  em relação ao nó de referência.

**Exemplo 5:** Determinar para o circuito abaixo as tensões  $E_A$  e  $E_B$  utilizando-se o método da tensão nos nós.



O circuito equivalente, transformando as fontes é dado por:

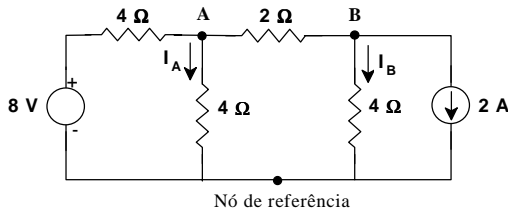
Tem-se que:  $\bar{I} = \bar{G} \cdot \bar{E}$ , e desta maneira:

$$\begin{bmatrix} 2 + 20/3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 + 1/2 + 1/3 & -1/5 - 1/2 \\ -1/3 - 1/2 & 1/5 + 1/2 + 1/4 + 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação matricial tem-se:  $E_A = 11,2 \text{ V}$  e  $E_B = 4 \text{ V}$ .

**Casos Particulares:**

- *Existência de fontes de tensão em série com uma resistência:* efetuar a conversão de fontes. Exemplo: calcular as correntes  $I_A$  e  $I_B$  da figura a seguir.



Matrizes  $\bar{I} = \bar{G} \cdot \bar{E}$ :

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/4 + 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A \\ E_B \end{bmatrix}$$

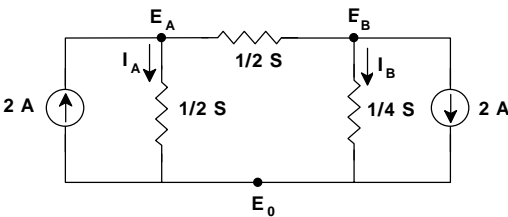
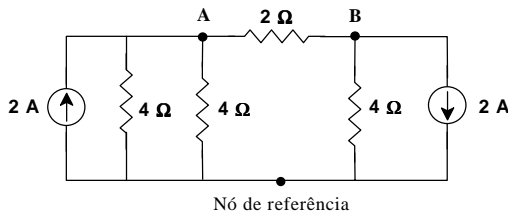
Resolvendo para as tensões tem-se:

$$\begin{aligned} 2 &= E_A - 1/2 E_B \\ -2 &= -1/2 E_A + 0,75 E_B \end{aligned}$$

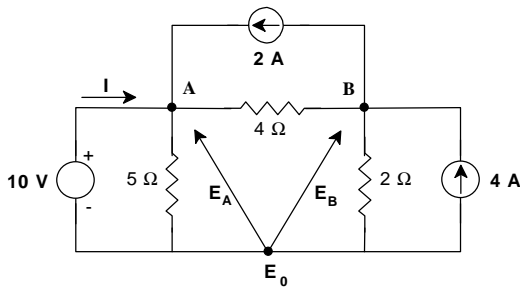
$$E_A = 1 \text{ V} \qquad E_B = -2 \text{ V}$$

Calculando agora as correntes tem-se:

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \text{ A} \\ I_B &= -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \text{ A} \end{aligned}$$



- *Fontes de tensão sem possibilidade de conversão:* considera-se que existe uma corrente a ser determinada para cada fonte.



Resolvendo para o segundo elemento da matriz  $\bar{I}$  tem-se:

$$2 = -0,25 \cdot 10 + 0,75 E_B$$

$$0,75 E_B = 2 + 2,5$$

$$E_B = \frac{4,5}{0,75} = 6 \text{ V}$$

$$E_A = 10 \text{ V (dado)}$$

Para o primeiro elemento tem-se:

$$I + 2 = 0,45 \cdot 10 - 0,25 E_B$$

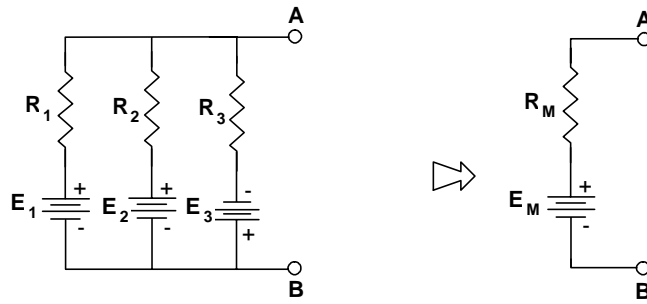
$$I = 4,5 - 1,5 - 2 \Rightarrow I = 1 \text{ A}$$

Matrizes  $\bar{I} = \bar{G} \cdot \bar{E}$ :

$$\begin{bmatrix} I + 2 \\ 4 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 + 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 + 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ E_B \end{bmatrix}$$

**III.5 Teorema de Millman**

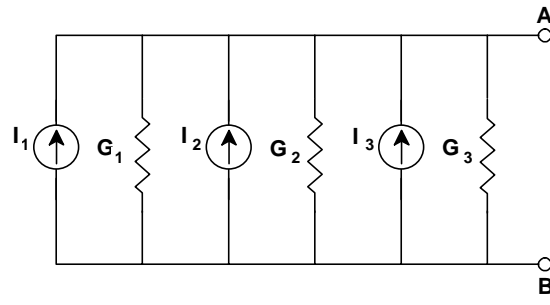
O Teorema de Millman apresenta um método usado para reduzir um número qualquer de fontes de tensão em paralelo a apenas uma. Este teorema constitui um caso especial da aplicação do teorema de Thévenin. A seguir, a partir de um exemplo este método é apresentado.



O primeiro passo é transformar os ramos “fonte de tensão/resistência em série” em “fontes de corrente/conduâncias em paralelo”. Estes cálculos são feitos da seguinte maneira:

$$G_i = \frac{1}{R_i}$$

$$I_i = E_i G_i$$

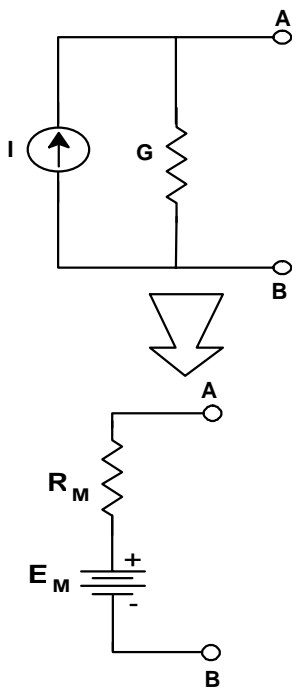


A seguir, deve-se calcular o circuito equivalente com uma única fonte de corrente e uma única condutância. Para tanto os seguintes cálculos devem ser realizados:

$$I = I_1 + I_2 - I_3$$

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

A seguir apresenta-se este circuito assim como o equivalente de Millman.



A transformação do circuito fonte de corrente/conduância em fonte de tensão/resistência deve ser realizada da seguinte maneira:

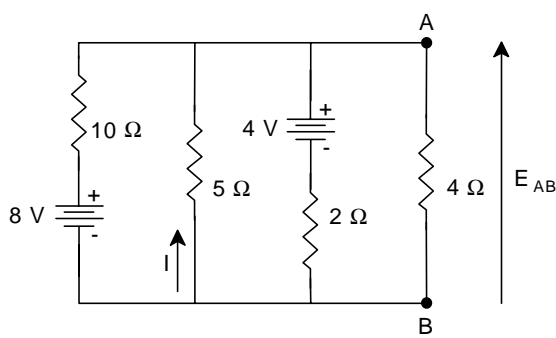
$$E_M = E_{AB} = \frac{I}{G} = \frac{I_1 + I_2 - I_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$R_M = \frac{1}{G} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

A tensão entre os pontos AB pode também ser dada da seguinte maneira:

$$E_{AB} = \frac{E_1 G_1 + E_2 G_2 - E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

**Exemplo 6:** Determinar a corrente na resistência de  $5\Omega$  utilizando o Teorema de Millman. Resolver também utilizando o teorema de Thévenin para efetuar uma comparação.

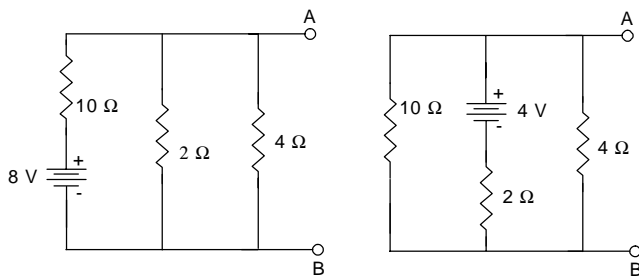


Usando Millman:

$$E_{AB} = \frac{8(1/10) + 4(1/2)}{\frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = 2,667V$$

$$I = -\frac{2,667}{5} = -0,533A$$

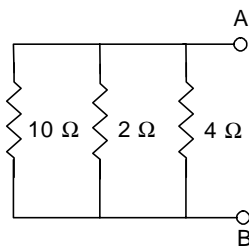
Usando Thévenin:



$E_{th}$  será calculada utilizando-se o teorema da superposição.

$$E_{Th} = E_{AB} = \frac{4/3 \times 8}{10 + 4/3} + \frac{20/7 \times 4}{20/7 + 2}$$

$$E_{Th} = \frac{10,67}{11,33} + \frac{11,43}{4,86} = 3,29V$$

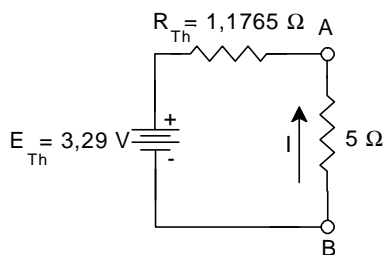


$R_{th}$  será calculada utilizando-se o procedimento padrão descrito.

$$\frac{1}{R_{Th}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{R_{Th}} = 0,85 \quad R_{Th} = 1,1765\Omega$$

Tendo calculado  $E_{Th}$  e  $R_{Th}$  pode-se finalmente calcular a corrente  $I$ .



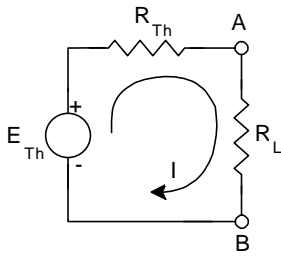
$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_C}$$

$$I = -\frac{3,293}{1,1765 + 5} = -0,533A$$

### III.6 Teorema da Máxima Transferência de Potência

Este teorema é utilizado quando em uma rede elétrica deseja-se obter a máxima transferência de potência da rede para uma carga resistiva  $R_L$ .

Para se calcular esta máxima transferência de potência utiliza-se o equivalente de Thévenin da rede para determinar a corrente  $I$  que passa pela carga  $R_L$ . O circuito apresentado a seguir mostra um exemplo.



$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

A potência absorvida pela carga será:

$$P_L = R_L I^2 = \frac{R_L E_{Th}^2}{(R_{Th} + R_L)^2} = \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}} \left[ 1 - \left( \frac{R_{Th} - R_L}{R_{Th} + R_L} \right)^2 \right]$$

A potência transferida  $P_L$  será máxima quando  $R_L = R_{Th}$ , ou seja, quando a carga for igual ao valor da resistência equivalente de Thévenin do circuito. Neste caso a potência em  $R_{Th}$  será  $\frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}}$  e assim pode-se afirmar que quando a potência transferida é a máxima, a eficiência do circuito é de 50%.